

Cours 12: Etat fondamental de l'équation de Schrödinger non-linéaire

On considère l'équation d'évolution non-linéaire

$$(NLS) \quad i \partial_t \psi + \Delta \psi + |\psi|^{p-1} \psi = 0$$

pour $\psi = \psi(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, avec $p > 1$.

On cherche une onde stationnaire $\psi(t, x) = e^{it} u(x)$,
avec $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On trouve que u doit satisfaire
l'équation elliptique non-linéaire

$$\Delta u - u + |u|^{p-1} u = 0.$$

On cherche maintenant $u(x) = u(|x|) > 0$ sur $\mathbb{R}^2$,

ce qui conduit à l'équation radiale ($r = |x|$)

$$(12.1) \quad u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) - u(r) + u(r)^p = 0, \quad r > 0.$$

Nous verrons aux exercices comment prouver l'existence d'une solution u h-q.

$$(12.2) \quad u(r) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } r \rightarrow \infty.$$

appelée état fondamental ("ground state") de (NLS).

Théorème 12.1 [Berestycki-Lions-Pelehier '81, Berestycki-Lions '83]

Il existe une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}_+)$ qui satisfait (12.1)-(12.2).

De plus,

$$u'(r) < 0 \quad \forall r > 0.$$

Nous démontrons ici l'unicité de l'état fondamental.

Théorème 12.2 [Coffman '72, Kwong '89, G. 2011]

La solution de (12.1)-(12.2) est unique.

La preuve que nous allons présenter est basée sur la méthode de tir ("shooting method"). Une autre preuve, basée sur la méthode de séparation des graphes peut être trouvée dans [Pichler-Serrin '83].

On considère le problème de Candy

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r} u' - u + u^p = 0, & r > 0, \\ u(0) = \alpha > 0, & \lim_{r \rightarrow 0} r u'(r) = 0. \end{cases}$$

(PC)

La condition $ru'(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$) est naturelle car la forme auto-adjointe de l'équation est

$$(12.3) \quad (ru')' - ru + ru^p = 0.$$

Une unique solution maximale $u(r; \alpha)$ de (PC) s'obtient par un argument de point fixe appliqué à l'équation intégrale équivalente à (12.3). On montre a posteriori que $u'(0; \alpha) = 0$ et que $u(r; \alpha)$ est définie et C^2 sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $\alpha > 0$.

Pour prouver le thm 12.2, nous allons appliquer la théorie de Sturm pour comparer, en fonction du paramètre α , les zéros de $u(r; \alpha)$ et ceux de

$$w(r; \alpha) := \frac{\partial}{\partial \alpha} u(r; \alpha),$$

qui est solution de

$$(PC') \quad \begin{cases} w'' + \frac{1}{r} w' - w + p u^{p-1} w = 0, & r > 0, \\ w(0) = 1, \quad w'(0) = 0. \end{cases}$$

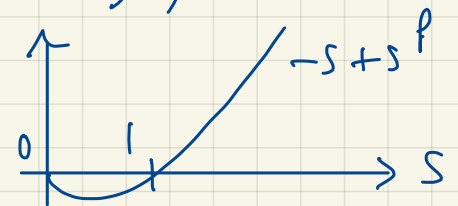
On définit les "ensembles solution" suivants :

$$N := \{ \alpha > \underline{\alpha} ; \exists r > 0 \text{ t.q. } u(r; \alpha) = 0 \};$$

$$A := \{ \alpha > \underline{\alpha} ; u(r; \alpha) > 0 \quad \forall r > 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r; \alpha) = 0 \};$$

$$P := \{ \alpha > \underline{\alpha} ; u(r; \alpha) > 0 \quad \forall r > 0, \quad \alpha \notin A \},$$

$$\text{où } \underline{\alpha} = \inf \{ s > 0 ; -s + s^p > 0 \} = 1.$$



Lemme 12.1: Pour tout $\alpha > 1$, $u(r) = u(r; \alpha)$ est strictement décroissante dans un voisinage à droite de $r=0$. De plus, si $\alpha \in P$ alors il existe $r_0 > 0$ t.q. $u'(r_0) = 0$.

Preuve: Soit $\alpha > 1$. Alors $-\alpha + \alpha^p > 0$, et on a:

$$u''(0) = \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{u'(r)}{r} + u(r) - u(r)^p$$

$$\begin{array}{l} u \in C^2(\mathbb{R}_+), \text{ cf. } \\ \text{Ber. - Lions '83, p. 329} \end{array} \quad \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} -u''(r) + \alpha - \alpha^p = -u''(0) + \alpha - \alpha^p$$

$$\Rightarrow u''(0) = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^p) < 0.$$

Comme $u'(0) = 0$, on conclut que $u' < 0$ dans un voisinage à droite de $r=0$.

La preuve de la deuxième assertion sera vue en exercice. #

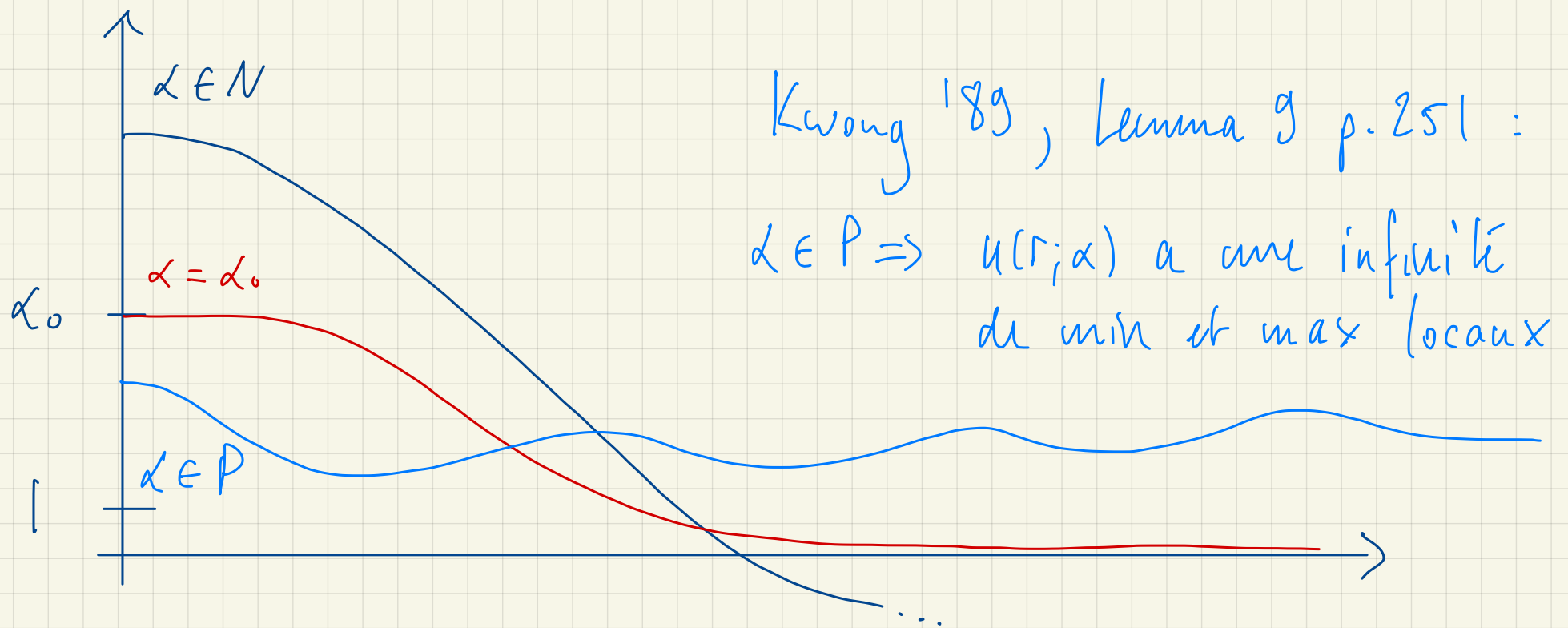
On a clairement $P \cup G \cup N = (0, \infty)$ et P, G, N disjoints deux à deux. Soit

$$z(\alpha) := \sup \{ s > 0 ; u(r; \alpha) > 0 \ \forall r \in [0, s) \}.$$

Si $\alpha \in N$, alors $z(\alpha)$ est le premier zéro de u .
Sinon $z(\alpha) = \infty$.

Le théorème 12.2 sera démontré si l'on prouve le résultat suivant.

Proposition 12.1: Il existe $\alpha_0 > \underline{\alpha}$ tel que
 $P = (1, \alpha_0)$, $G = \{\alpha_0\}$, $N = (\alpha_0, \infty)$.



Nous prouvons la proposition 12.1 par une série de
 lemmes.

Lemme 12.2: $(1, (\frac{p+1}{2})^{\frac{1}{p-1}}) \subset P$.

Preuve: Pour $\alpha > 1$ et $u(r) = u(r; \alpha)$ donnés,

considérons la fonction de Lyapounov

$$(12.4) \quad E(r) := \frac{1}{2} u'(r)^2 - \frac{1}{2} u(r)^2 + \frac{1}{p+1} u(r)^{p+1},$$

pour

$$\begin{cases} r \in [0, \infty) & \text{si } \alpha \in P \cup G, \\ r \in [0, z(\alpha)] & \text{si } \alpha \in N. \end{cases}$$

Par (PC), on a

$$(12.5) \quad \begin{aligned} E'(r) &= u' u'' - u u' + u^p u' = u' (u'' - u + u^p) \\ &= u' \left(-\frac{1}{r} u' \right) = -\frac{1}{r} (u')^2 \leq 0 \quad \forall r > 0. \end{aligned}$$

Donc $E(r)$ est décroissante.

Supposons que $1 < \alpha < \left(\frac{p+1}{2} \right)^{\frac{1}{p-1}}$. Alors

$$E(0) = -\frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{p+1} \alpha^{p+1} = \frac{\alpha^2}{p+1} \left(\alpha^{p-1} - \frac{p+1}{2} \right) < 0$$

et donc $E(r) < 0$ pour tout $r \geq 0$.

Si $\alpha \in N$, alors $E(z(\alpha)) = \frac{1}{2} u'(z(\alpha))^2 \geq 0$. $\Downarrow$

Si $\alpha \in G$, on a $u(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$), d'où

$$(12.6) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} E(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} u'(r)^2 \geq 0. \quad \Downarrow$$

On conclut donc que $\alpha \in P$. $\#$

Remarque 12.1: Comme $u(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, la limite (12.6) vaut zéro.

Lemme 12.3: Pour $\alpha \in G \cup N$ et $u(r) = u(r; \alpha)$,
on a $u'(r) < 0$ pour tout $r \in (0, z(\alpha))$ et
 $u'(z(\alpha)) < 0$ si $\alpha \in N$.

Preuve: Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{N}$, la fonction $E(r)$ définie par (12.4) satisfait $\lim_{r \rightarrow z(\alpha)} E(r) \geq 0$. Ainsi, par (12.5), $E(r) \geq 0$ pour tout $r \in (0, z(\alpha))$. D'autre part, par le lemme 12-1, $u' < 0$ dans un voisinage à droite de $r=0$. Posons

$$r_0 = \sup \{ s \in (0, z(\alpha)) ; u'(r) < 0 \quad \forall r \in (0, s) \}$$

et supposons par l'absurde $r_0 < z(\alpha)$. Par continuité et convexité, on déduit de (PC) que

$$u(r_0) - u(r_0)^p = u''(r_0) \geq 0$$

$$\hookrightarrow u(r_0)^p \leq u(r_0), \quad u(r_0)^{p-1} \leq 1.$$

Alors

$$p > 1 \Rightarrow \frac{p+1}{2} > 1$$

$$E(r_0) = -\frac{1}{2} u(r_0)^2 + \frac{1}{p+1} u(r_0)^{p+1} = \frac{u(r_0)^2}{p+1} \left(-\frac{p+1}{2} + u(r_0)^{p-1} \right) < 0. \quad \text{⚡}$$

Ainsi, $r_0 = z(\alpha)$ et $u'(r) < 0$ pour tout $r \in (0, z(\alpha))$.

Finalement, si $\alpha \in N$ on a soit $u'(z(\alpha)) < 0$, soit

$u'(z(\alpha)) = 0$ (par continuité de u'). Mais

$u'(z(\alpha)) = u(z(\alpha)) = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \quad \text{⚡} \quad \text{Donc } u'(z(\alpha)) < 0. \quad \#$

Lemme 12.4 : Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cup N$, $w(r) = w(r; \alpha)$ a au moins un zéro dans $(0, z(\alpha))$.

Preuve : Supposons d'abord $\alpha \in N$, $z(\alpha) < \infty$.

Ecrivant les équations de u et w sous la forme

$$(ru')' - ru + ru^p = 0, \quad (rw')' - rw + p r u^{p-1} w = 0,$$

l'identité de Lagrange donne :

$$(12.7) \quad \int_0^r (su')' w - (sw')' u \, ds = \int_0^r w s(u - u^p) - u s(w - p u^{p-1} w) \, ds$$

$$(12.8) \quad z(\alpha) u'(z(\alpha)) w(z(\alpha)) = s(u'w - w'u) \Big|_0^{z(\alpha)} = (p-r) \int_0^{z(\alpha)} u^p w \, ds$$

Supposons par l'absurde $w > 0$ sur $(0, z(\alpha))$.

Comme $u'(z(\alpha)) < 0$ par le lemme 12-3 et

$w(z(\alpha)) \geq 0$ par continuité, on déduit de (12.8)

que $\int_0^{z(\alpha)} u^p w < 0$, ce qui est absurde. Ainsi,

w change de signe sur $(0, z(\alpha))$, donc possède un zéro

dans cet intervalle par continuité.

Si $\alpha \in G$, on a $z(\alpha) = \infty$ et (12-7) donne :

$$r w(r)^2 \left(\frac{u}{w} \right)'(r) = r [u'(r)w(r) - w'(r)u(r)] = (p-1) \int_0^r u^p w ds.$$

Supposant par l'absurde que $w > 0$ sur $(0, \infty)$, on déduit que la fonction $\frac{u(r)}{w(r)}$ est positive et strictement croissante sur $(0, \infty)$. Mais ceci contredit le comportement asymptotique de $u(r)$ et $w(r)$ lorsque $r \rightarrow \infty$. En effet, on peut montrer :

$$(12-9) \quad u(r) \sim r^{-\frac{1}{2}} e^{-r}, \quad r \rightarrow \infty,$$

$$(12-10) \quad \exists \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}, \quad w(r) \sim r^{-\frac{1}{2}} (\alpha_0 e^{-r} + \alpha_1 e^r), \quad r \rightarrow \infty.$$

(12.10) découle du comportement asymptotique général de l'équation

$$w'' + \frac{1}{r} w' - w + p u^{p-1} w = 0,$$

cf. Hartman, ODE,
Thm 9.1, Chap. XI

étant donnée la décroissance exponentielle du potentiel $p u^{p-1}(r)$, qui est assurée par (12.9). #

Autre preuve: On écrit l'équation de u comme

$$(u-1)'' + \frac{1}{r} (u-1)' + \frac{u^p - u}{u-1} (u-1) = 0,$$

que l'on interprète comme une équation linéaire en la variable $(u-1)$. Comme $u(0) = \alpha > 1$, on déduit du lemme 12-3 qu'il existe un unique

$3 > 0$ t.q. $(u-1)(3) = 0$. En remarquant que

$$\forall u > 1, \quad \frac{u^p - u}{u-1} > p u^{p-1}$$

on déduit du théorème de comparaison de Sturm
que w doit avoir un zéro dans $(0, 3)$. $\#$

Pour conclure cette première partie, nous prouvons (12.9)
ou, plus précisément, le résultat suivant.

Proposition 12.2 : Soit $\alpha \in G$. Alors $u(r) = u(r; \alpha)$

satisfait : $\exists C > 0, \forall \varepsilon \in (0, 1) \exists r_\varepsilon > 0,$

$$\forall r \geq r_\varepsilon, \quad u(r) \leq C r^{-\frac{1}{2}} \exp(-\sqrt{1-\varepsilon}(r-r_\varepsilon)).$$

Preuve: Le changement de variable $v(r) = r^{\frac{1}{2}} u(r)$
transforme l'équation de u comme suit :

$$v(r) = r^{\frac{1}{2}} u(r), \quad u(r) = r^{-\frac{1}{2}} v(r), \quad r > 0$$

$$u' = -\frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} v + r^{-\frac{1}{2}} v', \quad u'' = \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} v - r^{-\frac{3}{2}} v' + r^{-\frac{1}{2}} v''$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow u'' + \frac{1}{r} u' &= r^{-\frac{1}{2}} v'' + \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} v - \cancel{r^{-\frac{3}{2}} v'} + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} v + \cancel{r^{-\frac{1}{2}} v'} \right) \\ &= r^{-\frac{1}{2}} v'' + \frac{1}{4} r^{-\frac{5}{2}} v \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow u'' + \frac{1}{r} u' - u + u^p = r^{-\frac{1}{2}} v'' + \frac{1}{4} r^{-\frac{5}{2}} v - [1 - u^{p-1}] u = 0$$

$$v'' + \frac{1}{4} r^{-\frac{3}{2}} v - [1 - u^{p-1}] r^{\frac{1}{2}} u = 0$$

$$v'' = \left[1 - u^{p-1}(r) - \frac{1}{4} r^{-\frac{3}{2}} \right] v =: q(r) v$$

Comme $q(r) \rightarrow 1$ lorsque $r \rightarrow \infty$, on a :

$$(12.11) \quad \forall \varepsilon \in (0, 1) \exists r_\varepsilon > 0, \quad v'' \geq (1 - \varepsilon) v \quad \text{sur } (r_\varepsilon, \infty).$$

Fixons $\varepsilon \in (0, 1)$ et posons

$$\varphi(r) := C e^{-\sqrt{1-\varepsilon}(r-r_\varepsilon)} - v(r).$$

Par (12.11),

$$\varphi''(r) = C(1-\varepsilon) e^{-\sqrt{1-\varepsilon}(r-r_\varepsilon)} - v''(r) \leq (1-\varepsilon)\varphi(r), \quad r > r_\varepsilon.$$

Posant $C = v(r_\varepsilon)$, on a $\varphi(r_\varepsilon) = 0$.

Supposons $\varphi(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$), i.e. $v(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$).

Alors $\varphi \geq 0$ sur (r_ε, ∞) , et le lemme est démontré.

En effet, si φ n'est pas positive sur (r_ε, ∞) ,

on déduit qu'il existe $r_1 > r_\varepsilon$ t.q.

$$\varphi(r_1) < 0 \text{ et } \varphi''(r_1) \geq 0,$$

ce qui contredit (12.11).



Pour finir la preuve, il suffit donc de montrer

$$(12.12) \quad v(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty).$$

On a

$$\begin{aligned} v'(r) &= (r^{\frac{1}{2}} u(r))' = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} u + r^{\frac{1}{2}} u' \\ &= r^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2r} u + u' \right) \sim r^{\frac{1}{2}} u'(r) \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

donc il existe $r_2 > r_1$ t.q. $v' < 0$ sur (r_2, ∞) .

Ainsi, il existe $L \geq 0$ t.q. $v(r) \rightarrow L$ ($r \rightarrow \infty$).

Comme v est C^2 avec v'' bornée à l'infini,

on conclut que $v'(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) (voir aussi rem. 12.1).

Alors l'équation de v donne $v''(r) \rightarrow L$ ($r \rightarrow \infty$).

Utilisant l'équation de v , on montre aussi que

v est C^3 sur $(0, \infty)$, avec v''' bornée à l'infini.

Alors l'existence de $\lim_{r \rightarrow \infty} v'(r)$ entraîne que
 $v''(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$). Donc $l = 0$.

Ainsi, (12.12) est vérifié, v est bornée et l'on peut choisir C indépendant de ε dans la définition de φ . #